| | | |
|---|---|---|
| **Matemática Discreta I**<br>Segundo parcial | $1^{\text{er}}$ Apellido: ____________________<br>$2^{\text{o}}$ Apellido: ____________________ | 12 de enero de 2018<br>Tiempo 2 h. |
| Dpto. Matematica Aplicada TIC<br>ETS Ingenieros Informáticos<br>Universidad Politécnica de Madrid | Nombre: ____________________<br>Número de matrícula: | **Nota:** |

**Ejercicio 1** (20 puntos)

Sea $D_{208}$ el conjunto de todos los divisores positivos de 208, y sea $|$ la relación de divisibilidad; es decir, $a|b$ significa que "$a$ divide a $b$".

**a)** Dibuja el diagrama de Hasse del conjunto ordenado $(D_{208}, |)$.

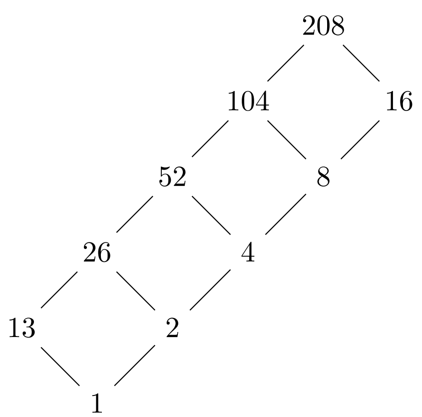
**b)** Obtén las cotas superiores e inferiores, supremo e ínfimo, máximo y mínimo, maximales y minimales, si los hay, del subconjunto $B = \{8, 26, 52, 104\}$.

**c)** Razona si 52 y 16 tienen complementario en $D_{208}$. En caso afirmativo obténlos.

**d)** Razona si $(D_{208}, |)$ es un Álgebra de Boole.

*Solución:*

a) $208 = 2^4 \cdot 13$, $\quad D_{208} = \{1, 2, 4, 8, 13, 16, 26, 52, 104, 208\}$.




b) $B = \{8, 26, 52, 104\}$

- Cotas superiores: $\{104, 208\}$
- Cotas inferiores: $\{2, 1\}$
- Supremo: $\{104\}$
- Ínfimo: 2
- Máximo: 104
- Minimo: $\emptyset$
- Maximales: $\{104\}$
- Minimales: $\{8, 26\}$

c) El complementario de 16 es 13 puesto que $\inf(16, 13) = \text{mcd}(16, 13) = 1$ y $\sup(16, 13) = \text{mcm}(16, 13) = 2^4 \cdot 13 = 208$. El 52 no tiene complementario.

d) Como 52 no tiene complementario en $D_{208}$ se tiene que $(D_{208}, |)$ no es retículo complementario y por tanto no es álgebra de Boole.

**Ejercicio 2** (10 puntos)

**a)** Obtén una expresión booleana en forma de "mínima suma de productos" para la función booleana cuyo conjunto de verdad es $S(f) = \{1110, 1010, 1011, 1001, 0011, 0001\}$. Resuelve utilizando uno de los dos métodos estudiados: Quine McCluskey o mapa de Karnaugh.

*Solución:*

a) $\boxed{xzt' + y't}$

| | 1110 | 1010 | 1011 | 1001 | 0011 | 0001 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1-10 | √ | √ | | | | |
| 101- | | √ | √ | | | |
| -0-1 | | | √ | √ | √ | √ |

**Ejercicio 3** (30 puntos)

**a)** En $\mathbb{Z}_{323}$, calcula: $[3]^{2018} + [7]^{-1}[2]$.

**b)** Razona si el siguiente sistema de congruencias tiene solución, y en caso afirmativo, resuélvelo.

$$\begin{cases} 6x \equiv 10 & \pmod{16} \\ 7x \equiv 5 & \pmod{12} \\ 2x \equiv 1 & \pmod{33} \end{cases}$$

*Solución:*

a) $\phi(323) = \phi(17) \cdot \phi(19) = 288$

$[3]^{2018} = ([3]^{288})^7 \cdot [3]^2 = [3]^2 = [9]$

$[7]^{-1} = [277]$

Finalmente, $[3]^{2018} + [7]^{-1}[2] = [9 + 277 \cdot 2] = [563] = [240]_{323}$

b) $\begin{cases} 6x \equiv 10 & \pmod{16} \\ 7x \equiv 5 & \pmod{12} \\ 2x \equiv 1 & \pmod{33} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x \equiv 5 & \pmod{8} \\ x \equiv 35 & \pmod{12} \\ x \equiv 17 & \pmod{33} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 15 & \pmod{8} \\ x \equiv 11 & \pmod{12} \\ x \equiv 17 & \pmod{33} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 7 & \pmod{2^3} \\ \cancel{x \equiv 11} & \pmod{2^2} \\ x \equiv 11 & \pmod{3} \\ \cancel{x \equiv 17} & \pmod{3} \\ x \equiv 17 & \pmod{11} \end{cases}$$

El sistema tiene solución puesto que $mcd(8, 12)|15 - 11$, $mcd(8, 33)|15 - 17$, y $mcd(12, 33)|11 - 17$.

$x = 7 \cdot (33) \cdot (33)_8^{-1} + 2 \cdot (88) \cdot (88)_3^{-1} + 6 \cdot (24) \cdot (24)_{11}^{-1} + 264t = 231 \cdot 1 + 176 \cdot 1 + 144 \cdot 6 + 264t = [215]_{264}$

**Ejercicio 4** (20 puntos)

María tiene 5 entradas para el cine, y quiere repartir 4 entre sus amigos: Luis, Juan, Ángel, Ricardo, Ana, Marta, Isabel, Andrea y Lorena.

**a)** ¿De cuántas formas puede hacerlo?

**b)** ¿Y si quiere ir con dos chicos y dos chicas?

**c)** Sabe que Ricardo y Ana no se llevan bien, por lo que no pueden ir juntos. ¿De cuántas formas puede repartir las entradas de forma que no les dé a los dos?

**d)** Siempre que va Juan al cine, va acompañado de Marta o de Lorena. ¿Cómo puede repartir entonces las entradas?

Finalmente, van al cine María, Luis, Ricardo, Isabel y Lorena.

**e)** ¿De cuántas formas se pueden sentar en una fila de 10 butacas, de forma que estén seguidos?

**f)** ¿De cuántas formas se pueden sentar un una fila de 5 butacas, de forma que Luis y Ricardo no estén juntos?

*Solución:*

a) $\binom{9}{4}$

b) $\binom{4}{2}\binom{5}{2}$

c) $\binom{9}{4} - \binom{7}{2}$

d) Si no va Juan $\binom{8}{4}$, si va Juan, $\binom{7}{2} + \binom{7}{2} - \binom{6}{1}$. Por tanto $\binom{8}{4} + 2\binom{7}{2} - \binom{6}{1}$

e) $6P_5$

f) $CR_{3,2} \cdot 2! \cdot 3!$

**Ejercicio 5** (20 puntos)

Resuelve la siguiente relación de recurrencia lineal no homogénea:

$$\begin{cases} a_n = 9a_{n-2} + 4(-3)^n, & \forall n \geq 2 \\ a_0 = 2, a_1 = 3 \end{cases}$$

*Solución:*

Solución homogénea: $S(n) = A \cdot 3^n + B \cdot (-3)^n$

Solución completa: $a_n = \frac{5}{2} \cdot 3^n - \frac{1}{2} \cdot (-3)^n + 2n(-3)^n$